代数曲線に関する **Grothendieck** 予想 — p 進幾何の視点から

望月 新一 （京大数理研）

I. 入門

A. 双曲型リーマン面の一意化

B. 数論的基本群

C. 結果

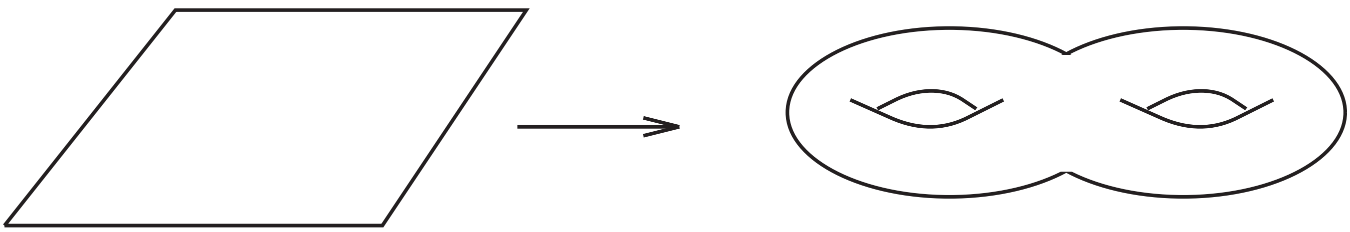
D. モジュラー形式

(A.) 双曲型リーマン面の一意化

<u>X: 双曲的曲線/$\mathbf{C}$</u>: 滑らかで、
proper、 連結な種数 g の 代数曲線
$-$ r 個の点、 s.t. $2g-2+r>0$

$\rightsquigarrow$ 双曲的リーマン面 $\mathcal{X}$

<u>Köbe の一意化定理</u>:
$\mathcal{X}$ の普遍被覆 $\widetilde{\mathcal{X}} \cong$ 上半平面 $\mathcal{H}$



言い換えれば：

「X という（純）代数的なものが、
$\mathcal{H}/\pi_1(\mathcal{X})$ という幾何的ないし解析的な
表示をもつ」

つまり、

$$\text{代数曲線 } X \quad \Longleftrightarrow \quad \pi_1(\mathcal{X}) \curvearrowright \mathcal{H}$$

ここで、

$$\begin{array}{ccc} \text{右辺} = \pi_1(\mathcal{X}) & + & \text{ある「数論的」なデータ} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{[モジュライによらず]} & + & \text{[モジュライによる]} \end{array}$$

（ただし、ここで、
「数論的」＝「無限素点における数論」）

(B.) 数論的基本群

K: （標数 0 の）体；
X_K: K 上の代数多様体

すると、$X_K \mapsto \pi_1(X_K)$

...(compact な）副有限 (profinite) 群、
X_K の有限次エタール被覆を統制する。

(例えば： $K = \mathbf{C}$ のとき、

$$\pi_1^{\mathrm{top}}(\text{対応する複素多様体 } \mathcal{X})$$

の副有限完備化。）

K が閉体でない時、

$$1 \to \pi_1(X_{\overline{K}}) \to \pi_1(X_K) \to \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \to 1$$

用語：

幾何的基本群 $\pi_1(X_{\overline{K}})$

ガロア群 $\Gamma_K \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$

数論的基本群 $\pi_1(X_K)$

K=標数０ $\Longrightarrow$ 幾何的基本群は $X_{\overline{K}}$ の
モジュライによらず
（曲線のとき、(g, r) だけで決まる）

K=標数ｐ $\Longrightarrow$ 幾何的基本群は $X_{\overline{K}}$ の
モジュライを決定しがち
（玉川：種数＝０とき）

以下では、上の系列の商を考える：

まず、素数 p を固定する。

$\Delta_X \stackrel{\mathrm{def}}{=} \pi_1(X_{\overline{K}})$ の最大 pro-p 商

$\Pi_{X_K} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Delta_X/\mathrm{Ker}(\pi_1(X_{\overline{K}}) \to \Delta_X)$

すると、

$$1 \to \Delta_X \to \Pi_{X_K} \to \Gamma_K \to 1$$

$$\Longrightarrow \Gamma_K \to \mathrm{Out}(\Delta_X) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Aut}(\Delta_X)/\mathrm{Inn}(\Delta_X)$$

「Γ_K が Δ_X に外作用する。」

（情報として、外作用 $\Longleftrightarrow$ 上の完全系列、
　モジュライによる！）

つまり、

$$X_K \mapsto \{\pi_1(X_{\overline{K}}) \ + \ \Gamma_K \curvearrowright \pi_1(X_{\overline{K}})\ \}$$

$$\text{又は}\ \ \{\Delta_X \ + \ \Gamma_K \curvearrowright \Delta_X\}$$

（形は $\mathbf{C}$ 上の一意化定理を連想させる！）

$\rightsquigarrow$ 自然な問い掛け :「$\mapsto$」は（何らかの意味で）「$\leftrightarrow$」で置き換えることはできないか？

これがいわゆる「**Grothendieck 予想**」

（X_K ＝双曲的曲線、又は「遠アーベル」(anabelian) な多様体、
K ＝「十分に数論的」な体）

(C.) 結果

K :「劣 p 進体」$\subseteq \mathbf{Q}_p$ 上有限生成な体

例 K : $\mathbf{Q}$ 上有限生成
K : $\mathbf{Q}_p$ 上有限生成
$$K = \bigcup_{[K':\mathbf{Q}]\leq N} K'$$

<u>定理 1</u>
X_K : 双曲的代数曲線 $/K$
S_K : smooth 代数多様体 $/K$
このとき、

$$X_K(S_K)^{\mathrm{dom}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^{\mathrm{open}}_{\Gamma_K}(\pi_1(S_K), \pi_1(X_K))$$
$$\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^{\mathrm{open}}_{\Gamma_K}(\Pi_{S_K}, \Pi_{X_K})$$

定理２

L, M： 関数体 $/K$ （任意次元）

このとき、

$$\mathrm{Hom}_K(M, L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^{\mathrm{open}}_{\Gamma_K}(\Gamma_L, \Gamma_M)$$

注：

(i) ある条件を満たす「双曲的な曲面」に関する「曲面版」もある。

(ii) 左辺を「代数曲線 X_K の代数的な点」、右辺を「Π_{X_K} という解析的な対象の点」とみれば、Köbe の定理と形が類似している。実際、ちょうどこのことにヒントを得て、「p 進幾何」で証明する。

(iii) 元々は、アーベル多様体の Tate 予想の類似 $\Longrightarrow$ Tate 予想と同様、**大域的**な数体の上でしか成立しないものとして考えられていた。つまり、(ii) のような視点は予想当時なかったらしい。その原因の一（？）：アーベル多様体の Tate 予想は p 進体上では成立しない。

(iv) 定理１以前に、標数０の絶対有限生成体の上では、
 ·　中村博昭氏　（種数０、Isom 版）
 ·　玉川安騎男氏　（アフィン、Isom 版）
の結果があり、特に、中村氏が有効に使い、玉川氏が本質的に改良した「被覆の塔を組織的に利用する」手法は定理１の証明でも生きている。

(v) K が $\mathbf{Q}$ 上有限生成の時、定理２の Isom 版は Pop の定理。

(D.) モジュラー形式

問題: 一体どうやって $\{\Delta_X \;+\; \Gamma_K \curvearrowright \Delta_X\}$
から代数曲線 X_K を復元するか？

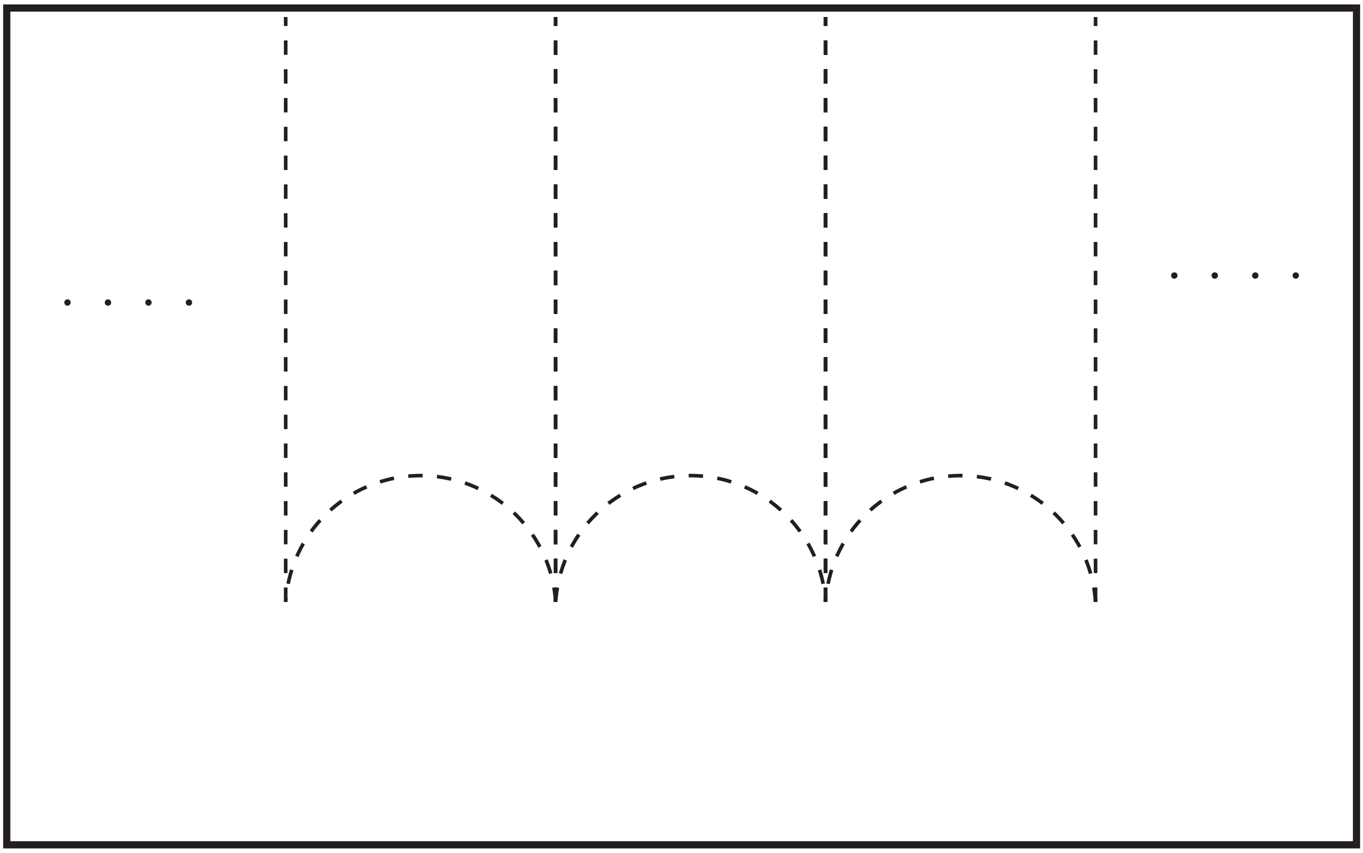
ヒント： $\mathbf{C}$ 上の場合、上半平面 $\mathcal{H}$ 上で

モジュラー形式を**解析的**に製造して

射影空間への埋め込みを構成する。

（例：志村多様体の構成, e.g.,
$\mathcal{H}/SL_2(\mathbf{Z})$, Poincaré 級数等）

$$\begin{array}{ccc}
\text{上半平面}\ \ \mathcal{H} & \rightarrow & \text{射影空間} \\
\downarrow & \circlearrowleft & \| \\
\text{代数曲線} & \hookrightarrow & \text{射影空間}
\end{array}$$



$SL_2(\mathbf{Z})$ の場合

<u>ポイント</u>：モジュラー形式の解析的な表示を考える。

$\Longrightarrow$ これと類似的なことを「**p 進の世界**」でやりたい。

$\Longrightarrow$ 「**p 進 Hodge 理論**」を用いる。

Grothendieck 予想

多様体の射 $\overset{\text{比較}}{\longleftrightarrow}$ 基本群（の射）

「代数幾何」
「多項式
＝関数」

「étale 位相＋
Galois 作用」

p 進 Hodge 理論

p 進体上の代数多様体に対して

de Rham
(crystalline)
cohomology $\overset{\text{比較}}{\longleftrightarrow}$ p 進 étale
cohomology

「多項式
＝関数、
その微分」

「étale 位相＋
Galois 作用」

簡単のため、 $[K:\mathbf{Q}_p]<\infty$,
$X_K=\overline{X}_K$, non-hyperelliptic
と仮定する。

$$\Longrightarrow \Delta_X^{\mathrm{ab}} \simeq T_p(J_{X_{\overline{K}}})$$

（$J_{X_{\overline{K}}}$: $X_{\overline{K}}$ の Jacobi 多様体）

<u>Hodge-Tate 分解</u>（$\mathbf{C}_p=\widehat{\overline{K}}$ ）:

$$\Delta_X^{\mathrm{ab}} \underset{\mathbf{Z}_p}{\otimes} \mathbf{C}_p \cong \{D_X \underset{K}{\otimes} \mathbf{C}_p\} \oplus \{D_X^{\vee} \underset{K}{\otimes} \mathbf{C}_p(1)\}$$

ただし、$D_X \overset{\mathrm{def}}{=} H^0(X_K, \omega_{X_K/K})$

なお、non-hyperelliptic $\Longrightarrow$

$$X_K \hookrightarrow P_X \overset{\mathrm{def}}{=} \mathbf{P}(D_X)$$

従って、X_K と同じ仮定を満たす Y_K と、Γ_K の外作用と両立する

$$\Delta_X \cong \Delta_Y$$

が与えられたら、

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \Delta_X^{\mathrm{ab}} \cong \Delta_Y^{\mathrm{ab}} \\
&\Longrightarrow D_X = (\Delta_X^{\mathrm{ab}} \otimes \widehat{\overline{K}})^{\Gamma_K} \\
&\qquad\qquad\qquad \cong (\Delta_Y^{\mathrm{ab}} \otimes \widehat{\overline{K}})^{\Gamma_K} = D_Y
\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{P}(D_X) & = & P_X & \cong & P_Y & = & \mathbf{P}(D_Y) \\
 & & \bigcup & & \bigcup & & \\
 & & X_K & \overset{?}{\dashrightarrow} & Y_K & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} P_X & \cong & P_Y \\ \bigcup & & \bigcup \\ X_K & \overset{?}{\dashrightarrow} & Y_K \end{array}$$

<u>問題</u>： X_K, Y_K を定義する（多項式型）
関係式が保たれるかどうか。

「関係式の保存」

$D_X = H^0(X_K, \omega_{X_K/K})$ の元たち、つまり、

モジュラー形式の（**p** 進）解析的表示

を使って証明する。

代数曲線に関する **Grothendieck** 予想 — p 進幾何の視点から

望月 新一　（京大数理研）

II. p 進 Hodge 理論

A. 射影空間の間の射

B. 上半平面の代替物の登場

C. Faltings の理論

D. J-幾何性

E. Malčev 完備化の p 進 Hodge 理論

(A.) 射影空間の間の射

前回：$[K:\mathbf{Q}_p]<\infty$;

双曲的曲線 X_K, Y_K；

$\Gamma_K \curvearrowright \Delta_X \cong \Delta_Y$ から出発して

$$\Downarrow$$

$$D_X = (\Delta_X^{\mathrm{ab}} \otimes \widehat{\overline{K}})^{\Gamma_K} \cong (\Delta_Y^{\mathrm{ab}} \otimes \widehat{\overline{K}})^{\Gamma_K} = D_Y$$

ただし、$D_X \stackrel{\mathrm{def}}{=} H^0(X_K, \omega_{X_K})$

$D_Y \stackrel{\mathrm{def}}{=} H^0(Y_K, \omega_{Y_K})$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{P}(D_X) & = & P_X & \cong & P_Y & = & \mathbf{P}(D_Y) \\
 & & \bigcup & & \bigcup & & \\
 & & X_K & \overset{?}{\dashrightarrow} & Y_K & &
\end{array}$$

「関係式の保存」

$$\Longleftrightarrow \quad \forall i \geq 1, \quad \text{合成}$$

$$\mathcal{R}_i \ \subseteq \ \overset{i}{\bigotimes} D_X \xrightarrow{\sim} \overset{i}{\bigotimes} D_Y \ \to \ D_Y^i$$

は、0か？

ただし、

$$D_X^i \overset{\text{def}}{=} H^0(X_K, \omega_{X_K}^{\otimes i})$$

$$D_Y^i \overset{\text{def}}{=} H^0(Y_K, \omega_{Y_K}^{\otimes i})$$

$$\mathcal{R}_i \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Ker}(\overset{i}{\bigotimes} D_X \to D_X^i)$$

$$\uparrow$$

「関係式」

(B.) 上半平面の代替物の登場

$\exists$ *stable* $\mathcal{Y} \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ s.t.

$\mathcal{Y} \otimes_{\mathcal{O}_K} K = Y_K$ と仮定しよう。

なお、$\wp \in \mathcal{Y} \otimes_{\mathcal{O}_K} k$ が、

special fiber 中 generic だと仮定する。

$$\Downarrow$$

$\mathcal{O}_L \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{unram}}_{\mathcal{Y},\wp})^\wedge$; $\Omega_L \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{L$ の連続な微分$\}$

$\Longrightarrow \dim_L(\Omega_L) = 1$;

$\exists$ 同義反復的な $\xi_Y : \mathrm{Spec}(L) \to \mathcal{Y}$;

「関係式の保存」 $\Longleftrightarrow$

$\mathcal{R}_i \ \to \ D^i_Y \stackrel{\xi_Y}{\hookrightarrow} \ \Omega_L^{\otimes i}$ が 0 になる

つまり、

$$\overset{i}{\bigotimes} D_X \to \Omega_L^{\otimes i}$$

を計算して、その $\mathcal{R}_i \subseteq \overset{i}{\bigotimes} D_X$ への制限が
0 になることを言いたい。

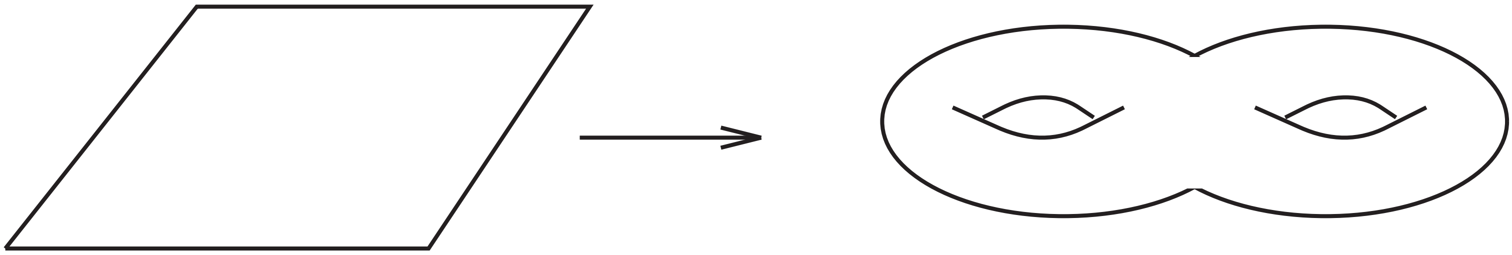
注：

(i) $D_Y \to \Omega_L$ は「モジュラー形式の
解析的展開」のようなもの。

$$\Downarrow$$

$\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_L)$ は上半平面の役を演じている。

(ii) 次節では、この展開を「π_1」の言葉に
翻訳して、$D_X \to \Omega_L$ を計算する。



$$\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_L) \to \mathcal{Y}$$

(iii) 実際、

$$\mathcal{O}_L \cong \{(\mathbf{Z}_p[t])^{\wedge,\ \mathrm{unram}}_{(p)}\}^{\wedge}$$

特に、$\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_L)$ は、Y_K（のモジュライ）によらない、幾何的次元＝1 の幾何的対象。つまり、$\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_L)$ は本当に Y_K を**「一意化」**しているのである。

言い換えれば、「$\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_L)$」の構成は、$Y_K$ から出発しようと、X_K から出発しようと、変わらないので、X_K と Y_K を比較するのに「適任」である。

(C.) Faltings の理論

$\Gamma_{L/K} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Ker}(\Gamma_L \to \Gamma_K) = \Gamma_{L\cdot\overline{K}}$

$\Longrightarrow$ Faltings, 兵頭 治氏：

$\exists$ 自然で、Γ_K-同変な同形

$$H^1(\Gamma_{L/K}, \widehat{\overline{L}}(1)) \cong \Omega_L \widehat{\otimes}_K \widehat{\overline{K}}$$

$$t^{1/p^\infty} \quad \leftrightarrow \quad (dt/t)$$

両辺： "log" っぽいもの $\cdot$ $L \ \widehat{\otimes}_K \ \widehat{\overline{K}}$

「局所的な Hodge-Tate 分解」:

張り合わせたら $\Longrightarrow$
普通の Hodge-Tate 分解

これで、微分形式の展開写像 $D_Y \to \Omega_L$ を完全に π_1 の言葉に翻訳できる:

$$\begin{array}{ccc}
H^1(\Delta_Y, \widehat{\overline{K}}(1))^{\Gamma_K} & \to & H^1(\Gamma_{L/K}, \widehat{\overline{L}}(1)) \\
\| & & \uparrow\wr \\
D_Y & \to & \Omega_L \widehat{\otimes}_K \widehat{\overline{K}}
\end{array}$$

この図式を次の図式の右にくっつけると、

$$\begin{array}{ccc}
H^1(\Delta_X, \widehat{\overline{K}}(1))^{\Gamma_K} & \xrightarrow{\sim} & H^1(\Delta_Y, \widehat{\overline{K}}(1))^{\Gamma_K} \\
\| & & \| \\
D_X & \xrightarrow{\sim} & D_Y
\end{array}$$

(下の行の合成)$^{\otimes i}$ ＝計算したいもの

上の行の合成＝ π_1 の世界のもの

さて、写像

$$\alpha_Y \stackrel{\mathrm{def}}{=} \pi_1(\xi_Y) : \Gamma_L \to \Pi_{Y_K}$$

と、与えられた同形

$$\Pi_{Y_X} \cong \Pi_{X_K}$$

の合成を $\alpha_X : \Gamma_L \to \Pi_{X_K}$ と書くと、

$(*^{\mathrm{geom}})$ α_X が、
$\exists\, \xi_X : \mathrm{Spec}(L) \to X_K$ から生じる。

つまり、α_X が「**幾何的**」になるかどうかを問うことができる。

もし $(*^{\mathrm{geom}})$ が成立すれば、先ほどの
「合成可換図式」

$$\begin{array}{ccc}
H^1(\Delta_X, \widehat{\overline{K}}(1))^{\Gamma_K} & \to & H^1(\Gamma_{L/K}, \widehat{L}(1)) \\
\| & & \uparrow \wr \\
D_X & \to & \Omega_L \widehat{\otimes}_K \widehat{\overline{K}}
\end{array}$$

の下の行が、(Faltings の理論の関手性より)
ξ_X から生じることになる。

$$\implies \xi_X^*(\mathcal{R}_i) = 0$$

即ち、

$$(*^{\mathrm{geom}}) \text{ 成立} \implies \text{「関係式の保存」成立}$$

従って、$(*^{\mathrm{geom}})$ を示せば、十分。

(D.) J-幾何性

$(*^{\mathrm{geom}}) \iff \{\alpha_X$ の幾何性 $\}$

は難し過ぎる

$\Downarrow$

$$\text{合成} \quad \alpha_X^J : \Gamma_L \to \Pi_{X_K} \to \Pi_{J^{(1)}_{X_K}}$$

を考える。

ただし、$J^{(1)}_{X_K}$ は X_K の Albanese :

$$1 \to \Delta_X^{\mathrm{ab}} \to \Pi_{J^{(1)}_{X_K}} \to \Gamma_K \to 1$$

α_X^J の幾何性（$= ? \in J^{(1)}_{X_K}(L)$ から生じる）を、α_X の **J-幾何性**と呼ぶ。本節と次節では、α_X の **J-幾何性**について説明する。

<u>準同形</u> α_X^J <u>の幾何性</u>:

(i) 幾何的な（$= ? \in Y_K(K)$ から生じる）

$$\beta_Y : \Gamma_K \to \Pi_{Y_K}$$

に対して、

$$\beta_X^J : \Gamma_K \to \Pi_{Y_K} \cong \Pi_{X_K} \to \Pi_{J_{X_K}^{(1)}}$$

の幾何性を示す。（次節で詳述。）

(ii) 差 "$\alpha_X^J - \beta_X^J$"

$$\in \mathrm{Im}(H^1(\Gamma_L, \Delta_Y^{\mathrm{ab}})) \subseteq H^1(\Gamma_L, \Delta_X^{\mathrm{ab}})$$

の幾何性を示す。（本節で説明。）

(ii) の証明：

Tate の定理 $\Longrightarrow \Delta_X^{\mathrm{ab}} \cong \Delta_Y^{\mathrm{ab}}$ は

$$\text{Formal gp.}(J_{X_K}) \cong \text{Formal gp.}(J_{Y_K})$$

から生じる。従って、

$$差 \text{``}\alpha_Y^J - \beta_Y^J\text{''} \in H^1(\Gamma_L, \Delta_Y^{\mathrm{ab}})$$

は定義より幾何的 $\Longrightarrow$ この差を、上の同形で送っても、出てくる元

$$= \quad 差 \quad \text{``}\alpha_X^J - \beta_X^J\text{''}$$

は依然として幾何的。証明終。

(E.) Malčev 完備化の p 進 Hodge 理論

準同形 $\beta_Y : \Gamma_K \to \Pi_{Y_K}$ は

$$1 \to \Delta_X \to \Pi_{X_K} \to \Gamma_K \to 1$$

の分裂を定義 $\Longrightarrow \quad \Gamma_K \overset{\beta_Y}{\curvearrowright} \Delta_Y$

（外作用ではなく、本物の作用。）

$$\Downarrow$$

Δ_Y の（二次の）$\widehat{\overline{K}}$ 上の **Malčev** 完備化の「重さ 0」の商（$\Longleftrightarrow$ (1), (2) 等、nonzero Tate twist がない最大のもの）が定義される：

$$0 \to \wedge^2 D_Y \otimes_K \widehat{\overline{K}} \to \mathcal{Z}_Y \to D_Y \otimes_K \widehat{\overline{K}} \to 0$$

$\mathcal{Z}_Y$:　$\widehat{\overline{K}}$ 上の Lie 環、Γ_K-加群。

ところが、Bloch-加藤の理論＋ある計算

$$\Downarrow$$

$\{\beta_Y^J$の J-幾何性 $\}\Longleftrightarrow\{$ $\mathcal{Z}_Y$ が 分裂する $\}$

（ただし、右辺＝

「上の Γ_K-加群の完全系列が分裂する」）

一方、定義より、

$$\{\overset{\beta_Y}{\curvearrowright}\Delta_Y\} \;\cong\; \{\overset{\beta_X}{\curvearrowright}\Delta_X\}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{Z}_Y \overset{\Gamma_K}{\cong} \mathcal{Z}_X$$

従って、上と組み合わせると、

$$\{\beta_Y \text{ の J-幾何性 }\} \Longleftrightarrow \{\beta_X \text{ の J-幾何性 }\}$$

よって、(i)（$= \beta_X^J$ の幾何性）が成立。

代数曲線に関する **Grothendieck** 予想 — p 進幾何の視点から

望月 新一 （京大数理研）

III. 有理点の構成

A. J-幾何性と Chern 類

B. 収束の設定

C. 収束の証明

D. 主定理の証明

(A.) J-幾何性と Chern 類

<u>前回</u>： 幾何的な

$$\alpha_Y \stackrel{\mathrm{def}}{=} \pi_1(\xi_Y) : \Gamma_L \to \Pi_{Y_K}$$

と、与えられた同形 $\Pi_{Y_X} \cong \Pi_{X_K}$ から
合成$\alpha_X : \Gamma_L \to \Pi_{X_K}$を作り、さらに

$$\alpha_X^J : \Gamma_L \to \Pi_{X_K} \to \Pi_{J^{(1)}_{X_K}}$$

の幾何性を示した。従って、**合成**

$$\Pi_{X_L} \xrightarrow{(\mathrm{id},\alpha_X)} \Pi_{X_L \times_L X_L} \longrightarrow \Pi_{X_L \times_L J^{(1)}_{X_L}}$$

も**幾何的**である。（注：“$[\pi_1, \text{直積}] = 0$”）

$$c_1(\mathrm{diagonal}) \in H^2(\Pi_{X_L \times_L X_L}, \mathbf{Z}_p(1))$$

を考えよう。初等的代数幾何から、この類

$$\in \mathbf{Q} \cdot \mathrm{Im}\{c_1(\mathcal{M}) \in H^2(\Pi_{X_L \times_L J^{(1)}_{X_L}}, \mathbf{Z}_p(1))\}$$

$\Longrightarrow$ （上の合成の幾何性 ＋

Kummer exact sequence より）

$$\eta_X = c_1({}^{\exists}\mathcal{L}) + \mathrm{torsion}$$

ただし、

$$\eta_X \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\mathrm{id}, \alpha_X)^* c_1(\mathrm{diagonal})$$

は「人工的な $c_1(\mathcal{O}_{X_L}(\xi_X))$」。

注： 本当のξ_Xの存在はまだ分からない。

$\Longrightarrow$ （「$\deg(\mathcal{L})$ は自動的に 1 になる」より）

X_L 上に deg=1 の line bundle が存在する！

$\Longrightarrow \mathcal{L}^{\otimes m} = \mathcal{O}_{X_L}(D)$

ただし、

m=大、p と素

$D = \bigcup \mathrm{Spec}(L_i); \quad [L_i : L] < \infty$

$\Longrightarrow ([^{\exists} L_i : L], p) = 1$

$\Longrightarrow L_i/L$ <u>**tamely ramified**</u>!

<u>結論</u>: $Y_K(L)^{\text{非退化}} \neq \emptyset \Longrightarrow X_K(L^{\mathrm{tm}}) \neq \emptyset$

(B.) 収束の設定

準同形$\alpha_{Y_L}: \Gamma_L \to \Pi_{Y_L}$から出発して、
$\forall\, i \geq 0$ に対して、部分群を定義：

$$\Delta_{Y^i} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathrm{Image}(\alpha_{Y_L})) \cdot \Delta_Y^{<i>} \subseteq \Pi_{Y_L}$$

ただし、

$$\Delta^{<0>} \stackrel{\text{def}}{=} \Delta$$

$$\Delta^{<i+1>} \stackrel{\text{def}}{=} (\Delta^{<i>})^p \cdot [\Delta^{<i>}, \Delta^{<i>}]$$

$$\Downarrow$$

幾何的に連結（なぜなら、$\Delta_{Y^i} \twoheadrightarrow \Gamma_L$）な有限次étale 被覆の塔が発生：

$$\ldots \to Y_L^{i+1} \to Y_L^i \to \ldots \to Y_L$$

同様に、$\alpha_{X_L} : \Gamma_L \to \Pi_{X_L}$ に対しても、
被覆の塔が定義される：

$$\ldots \to X_L^{i+1} \to X_L^i \to \ldots \to X_L$$

ところが、$\alpha_Y = \pi_1(\xi_Y)$ は幾何的、

$$\mathrm{Image}(\alpha_{Y_L} : \Gamma_L \to \Pi_{Y_L}) \subseteq \Delta_{Y^i}$$

$$\Downarrow$$

$\xi_Y \in Y_L(L)$ は自然な $\xi_Y^i \in Y_L^i(L)$ に持ち
上がり、(A.) の「結論」を適用すると、

$$\Downarrow$$

$$\forall\, i \geq 0,\ X_L^i(L^{\mathrm{tm}}) \neq \emptyset$$

<u>収束定理</u>：このような状況の下、$\forall i \geq 0$,

$$\xi^i_{X^i} \in X^i_L(L^{\mathrm{tm}}); \quad \xi^i_X \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Image}_X(\xi^i_{X^i})$$

$$\Downarrow$$

$$\xi^i_X \quad \xrightarrow{p\text{ 進}} \quad {}^{\exists!}\xi_X \in X_L(L) \subseteq X_L((L^{\mathrm{tm}})^\wedge)$$

s.t. $\alpha_X = \pi_1(\xi_X)$.

<u>注</u>:

(i) この定理の証明は次節で紹介する。

(ii) これで、$(*^{\mathrm{geom}})$ の証明は完結する。
従って、定理 1 の証明も完結するが、
長くて複雑なので、(D.) で復習する。

(iii) このように被覆の塔を組織的に利用するという手法は、Anderson-伊原や中村の仕事にまで遡り、ここでは、玉川の証明にやや近い形で援用している。

ただし、玉川の場合、基礎体は**有限体**だったため、収束は自動的。つまり、p 進 Hodge 理論のような難しい理論の力を借りて上の「収束定理」のようなものを証明する必要はなかった。

(C.) 収束の証明

次の可換図式に注意しよう：

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \text{“}\Delta_{X^i}\text{”} & & \\
 & & \| & & \\
\Gamma_L & \xrightarrow{\pi_1(\xi^i_{X^i})} & \Pi_{X^i_L} & \longrightarrow & \Gamma_L \\
\| & & \bigcap & & \text{“}\alpha_X\text{”} \downarrow \\
\Gamma_L & \xrightarrow{\pi_1(\xi^i_X)} & \Pi_{X_L} & \longrightarrow & \Pi_{X_L}/\Delta_X^{<i>}
\end{array}
$$

（ただし、上の行の合成は id_{Γ_L} である。）

つまり、<u>modulo</u> $\Delta_X^{<i>}$,

$$\text{“}\alpha_X\text{”} \equiv \pi_1(\xi^i_X) : \Gamma_L \to \Pi_{X_L}$$

もし、仮に $i=\infty$ だったとすると、Faltings の理論の関手性、即ち (II.) (C.) の可換図式

$$\begin{array}{ccc}
H^1(\Delta_X, \widehat{\overline{K}}(1)) & \xrightarrow{\pi_1(\xi_X^i)^*} & H^1(\Gamma_{L/K}, \widehat{\overline{L}}(1)) \\
\bigcup & & \| \wr \\
D_X \otimes_K \widehat{\overline{K}} & \xrightarrow{d\xi_X^i} & \Omega_L \widehat{\otimes}_K \widehat{\overline{K}}
\end{array}$$

の上の行が完全に決まってしまい

$$\Downarrow$$

$\xi_X^{i=\infty}$ の P_X における射影座標（＝下の行）も、完全に決まることになる。

つまり、$\xi_X^{i=\infty} \in X_L(L) \subseteq P_X(L)$ 自身も完全に決まる。

勿論、実際には、$i \neq \infty$ だが、Faltings の理論の「p 進的連続性」から、$\forall i \geq 0$,

$$\text{“}\alpha_X\text{”} \equiv \pi_1(\xi_X^i) : \Gamma_L \to \Pi_{X_L} \text{ modulo } \Delta_X^{<i>}$$

$$\Downarrow$$

$$\xi_X^i \text{ の射影座標も、} \bmod p^{i-{}^\exists c} \text{ で決まる。}$$

ところが、$X_K \subseteq P_X \implies$ これで点列 $\{\xi_X^i\}$ が p 進的に収束することが分かる。

極限の一意性や性質も、同様な議論より従う。

(D.) 主定理の証明

定理 1

K:「劣 p 進体」$\subseteq \mathbf{Q}_p$ 上有限生成な体
X_K : 双曲的代数曲線$/K$
S_K : smooth 代数多様体$/K$
このとき、

$$
\begin{aligned}
X_K(S_K)^{\mathrm{dom}} &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^{\mathrm{open}}_{\Gamma_K}(\pi_1(S_K), \pi_1(X_K)) \\
&\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^{\mathrm{open}}_{\Gamma_K}(\Pi_{S_K}, \Pi_{X_K})
\end{aligned}
$$

証明： $[K : \mathbf{Q}_p] < \infty$ の場合にすぐ帰着。
$\Longrightarrow p$ 進 Hodge 理論使用可。

なお、簡単のため、$X_K, S_K = Y_K$が proper, non-hyperelliptic な双曲的曲線であると仮定しよう。

簡単のため、任意の open な準同形ではなく
同形 $\Gamma_K \curvearrowright \Delta_X \cong \Delta_Y$から出発して、

$$D_X = (\Delta_X^{\mathrm{ab}} \otimes \widehat{\overline{K}})^{\Gamma_K} \cong (\Delta_Y^{\mathrm{ab}} \otimes \widehat{\overline{K}})^{\Gamma_K} = D_Y$$

ただし、$D_X \stackrel{\mathrm{def}}{=} H^0(X_K, \omega_{X_K})$

$$D_Y \stackrel{\mathrm{def}}{=} H^0(Y_K, \omega_{Y_K})$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{P}(D_X) & = & P_X & \cong & P_Y & = & \mathbf{P}(D_Y) \\ & & \bigcup & & \bigcup & & \\ & & X_K & \stackrel{?}{\dashrightarrow} & Y_K & & \end{array}$$

「関係式の保存」

曲線 Y_Kの stable model $\mathcal{Y} \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$に対して、同義反復的な「点」

$$\mathrm{Spec}(L) \to Y_K$$

を作る。ただし、

$L \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\mathcal{O}^{\mathrm{unram}}_{\mathcal{Y},\wp})^{\wedge}$の商体

$\wp = \mathcal{Y}$の special fiber の$^\exists$ generic point

すると、「π_1の関手性」より、準同形

$$\alpha_Y : \Gamma_L \to \Pi_{Y_K}$$

や、α_Yと与えられた同形との合成が定義される：

$$\alpha_X : \Gamma_L \to \Pi_{X_K}$$

しかも、「関係式の保存」を言うには、

$$\alpha_X \text{の幾何性}$$

（$=? \in X_K(L)$ から生じる）を言えればよい。

ところが、α_X の幾何性を直接証明することは難し過ぎる。 従って、

$\alpha_X^J : \Gamma_L \to \Pi_{J_{X_K}^{(1)}}$ の幾何性を、
Bloch-加藤の理論等を使って証明する。

$$\Downarrow$$

Chern 類の議論より、$X_L(L^{\mathrm{tm}}) \neq \emptyset$

最後に、α_Xを使って、X_Lの被覆の塔を作り、上の tame 有理点の存在から、この塔の各被覆が tame 有理点を持つことを帰結する。

$$\Downarrow$$

その点たちが「ξ_X」に p 進収束し、しかも、

$$\alpha_X = \pi_1(\xi_X)$$

$$\Downarrow$$

α_X は幾何的。

証明終。